

Kihilise kasvatamise/kahandamise meetodid jääk-  
pingete määramiseks ortotroopsetes mittehomogeen-  
setes silindrites: rakendus kasvupingete määramiseks  
puu tüves

Layer growing/removing methods for determination of residual  
stresses in orthotropic inhomogeneous cylinders: application to  
analysis of growth stresses in trees

Jakub Kõo, Jaak Valgur

Maaehituse ja veemajanduse õppetool

Metsandus- ja maaehitusinstituut

Eesti Maaülikool

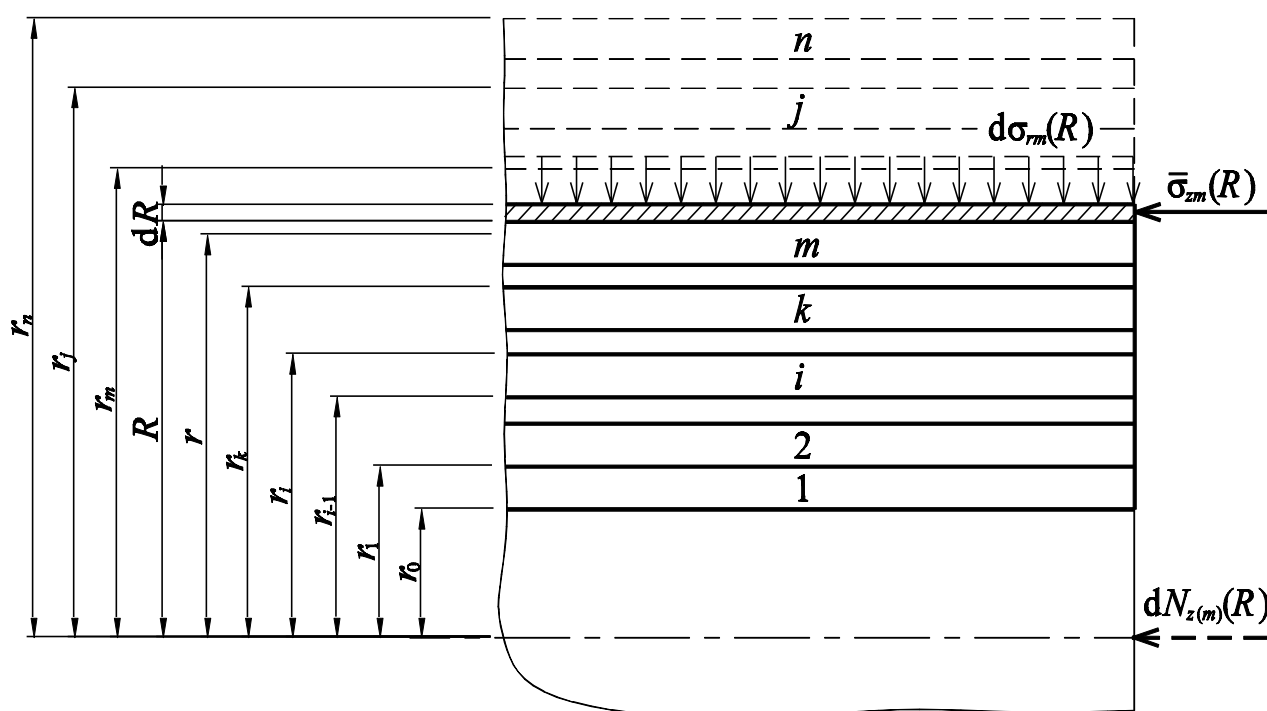
2018

## Sissejuhatus

Kihilise kasvatamise/kahandamise meetodid jääkpingete määramiseks mittehomogeensetes ortotroopsetes silindrites pakuvad huvi jääkpingete uurimisel kihelistes komposiitmaterjalides, samuti puidu jääkpingete uurimisel ja kasvupingete modelleerimisel. Ettekandes kirjeldatakse meetodi algoritmi ja tuuakse rakendusnäitena kasvupingete modelleerimine Jaapani punase männi (*Pinus densiflora*) tüves.

Meetodi algoritm mittehomogeensetele isotroopsetele silindritele on esitatud töös [Kõo, Valgur: 5<sup>th</sup> Int. Conf. On Residual Stresses, Linköping, 1997].

## Lähteandmed



**Joonis 1.** Kihtide kasvamine silindri välispinnal

Elastsuskonstandid:  $E_{ri}$ ,  $E_{\theta i}$ ,  $E_{zi}$ ,  $\mu_{rzi}$ ,  $\mu_{r\theta i}$ ,  $\mu_{z\theta i}$ ,  $\mu_{\theta zi}$

Deformatsioonid sise- või välispinnal kihi  $m$

kasvamisel/kahanemisel:  $\varepsilon_{\theta 1(m)}(R)$ ,  $\varepsilon_{z 1(m)}(R)$

või algpinged kihi  $m$  liikuvale pinnale:  $\bar{\sigma}_{\theta m}(R)$ ,  $\bar{\sigma}_{zm}(R)$

## Meetodite ühine algoritm

Kihilise kasvatamise/kahandamise meetodite üldine algoritm [Kõo: 4<sup>th</sup> Europ. Conf. on Residual Stresses, Cluny (France), 1996]

$$\begin{aligned}\sigma_{rm}(r) &= \sigma_{rm(m)}^*(r) + \sum_{j=m+1}^n \sigma_{rm(j)}^*(r) \\ \sigma_{\theta m}(r) &= \bar{\sigma}_{\theta m}(r) + \sigma_{\theta m(m)}^*(r) + \sum_{j=m+1}^n \sigma_{\theta m(j)}^*(r) \\ \sigma_{zm}(r) &= \bar{\sigma}_{zm}(r) + \sigma_{zm(m)}^*(r) + \sum_{j=m+1}^n \sigma_{zm(j)}^*(r)\end{aligned}\quad (1)$$

Pinnakihi  $dR$  formeerumise mehaaniline efekt:

- radiaalne pinnakoormus (pinnakihi  $dR$  tasakaalutingimusest)

$$d\sigma_{rm}(R) = -\bar{\sigma}_{\theta m}(R)R^{-1}dR \quad (2)$$

- äärekoormuse resultantjõud (pikijõud)

$$dN_{z(m)}(R) = 2\pi \bar{\sigma}_{zm}(R)RdR \quad (3)$$

Elastusteooria ülesanne:  $m$ -kihiline ortotroopne silinder koormustega (2), (3). Lahendamiseks lähtume homogeenise mittetäielikult ortotroopse ( $\mu_{zri} = \mu_{z\theta i}$ ) silindri telgsümmeetrilise ülesande üldlahendist [Лехницкий: Теория упругости анизотропного тела, Москва, 1977]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= C_2 r^{k-1} - C_3 r^{-1-k} \\ \sigma_\theta &= k(C_2 r^{k-1} + C_3 r^{-1-k})\end{aligned}\quad (4)$$

$$k = \sqrt{\left(E_r^{-1} - \mu_{z\theta}^2 E_z^{-1}\right)\left(E_\theta^{-1} - \mu_{z\theta}^2 E_z^{-1}\right)^{-1}}$$

Lisapinged kihis  $i$ :

$$\begin{aligned} d\sigma_{ri(m)}^*(r, R) &= 2^{-1} E_{\theta 1}^* \left[ r^{k_i-1} df_i(R) - r^{-1-k_i} dg_i(R) \right] \\ d\sigma_{\theta i(m)}^*(r, R) &= 2^{-1} k_i E_{\theta 1}^* \left[ r^{k_i-1} df_i(R) + r^{-1-k_i} dg_i(R) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$E_{\theta 1}^* = E_{\theta 1} (1 - \mu_{z\theta 1} \mu_{\theta z 1})^{-1} \quad k_i = \sqrt{(E_{ri}^{-1} - \mu_{z\theta i}^2 E_{zi}^{-1})(E_{\theta i}^{-1} - \mu_{z\theta i}^2 E_{zi}^{-1})}^{-1}$$

$f_i(R)$ ,  $g_i(R)$  on dimensioonita funktsioonid, mis avaldatakse mõõdetud deformatsioonide kaudu.

Hooke'i seadus ortotroopsele materjalile

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r^{-1} & -\mu_{\theta r} E_\theta^{-1} & -\mu_{zr} E_z^{-1} \\ -\mu_{r\theta} E_r^{-1} & E_\theta^{-1} & -\mu_{z\theta} E_z^{-1} \\ -\mu_{rz} E_r^{-1} & -\mu_{\theta z} E_\theta^{-1} & E_z^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Pikipinge kihis  $i$  [(5)  $\rightarrow$  (6)  $\rightarrow$ ]:

$$d\sigma_{zi(m)}^*(r, R) = 2^{-1} E_{z1} E_{\theta 1}^* \left[ c_{3i} r^{k_i-1} df_i(R) + c_{4i} r^{-1-k_i} dg_i(R) + 2E_{\theta 1}^* d\varepsilon_z(R) \right] \quad (7)$$

Ringdeformatsioon kihis  $i$  [(5)  $\rightarrow$  (6)  $\rightarrow$ ]:

$$d\varepsilon_{\theta i}(r, R) = 2^{-1} E_{\theta 1} \left[ a_i r^{k_i-1} df_i(R) + b_i r^{-1-k_i} dg_i(R) \right] - \mu_{z\theta i} d\varepsilon_z(R) \quad (8)$$

Tingimused vabal (statsionaarsel) pinnal ( $r = r_0$ ):

$$\begin{aligned} d\sigma_{r1(m)}^*(r_0, R) &= 0 \\ d\varepsilon_{\theta 1(m)}(r_0, R) &= d\varepsilon_{\theta 1(m)}(R) \\ d\varepsilon_{z1(m)}(r_0, R) &= d\varepsilon_{z1(m)}(R) \end{aligned} \quad (9)$$

Pidevustingimused kihtide  $i-1$  ja  $i$  kontaktpinnal ( $r = r_{i-1}$ ):

$$\begin{aligned} d\sigma_{ri-1(m)}^*(r_{i-1}, R) &= d\sigma_{ri(m)}^*(r_{i-1}, R) \\ d\varepsilon_{\theta i-1(m)}^*(r_{i-1}, R) &= d\varepsilon_{\theta i(m)}^*(r_{i-1}, R) \end{aligned} \quad (10)$$

Funktsioonid  $f_i(R)$ ,  $g_i(R)$  [(5), (7)  $\rightarrow$  (9)  $\rightarrow$ ]:

$$\begin{aligned} d f_i(R) &= A_{1i} d \varepsilon_{\theta 1}(R) + A_{2i} d \varepsilon_{z 1}(R) \\ d g_i(R) &= B_{1i} d \varepsilon_{\theta 1}(R) + B_{2i} d \varepsilon_{z 1}(R) \end{aligned} \quad (11)$$

Konstandid  $A_{1i}$ ,  $A_{2i}$ ,  $B_{1i}$  ja  $B_{2i}$  arvutatakse rekurrentsete seostega:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= a_{11} & A_{21} &= \mu_{z\theta 1} a_{11} & B_{11} &= b_{11} & B_{21} &= \mu_{z\theta 1} b_{11} \\ A_{1i} &= a_{1i} A_{1,i-1} + a_{2i} B_{1,i-1} \\ A_{2i} &= a_{1i} A_{2,i-1} + a_{2i} B_{2,i-1} + a_{3i} \\ B_{1i} &= b_{1i} A_{1,i-1} + b_{2i} B_{1,i-1} \\ B_{2i} &= b_{1i} A_{2,i-1} + b_{2i} B_{2,i-1} + b_{3i} \end{aligned} \right\} \quad (i = 2, 3, \dots, m) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= r_0^{1-k_1} k_1^{-1} & b_{11} &= r_0^{1+k_1} k_1^{-1} \\ a_{31} &= \mu_{z\theta 1} a_{11} & b_{31} &= \mu_{z\theta 1} b_{11} \\ a_{1i} &= (c_{2i} + c_{1,i-1})(c_{1i} + c_{2i})^{-1} r_{i-1}^{k_{i-1}-k_i} & b_{1i} &= (c_{1,i-1} - c_{1i})(c_{1i} + c_{2i})^{-1} r_{i-1}^{1+k_i} \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{1i} &= k_i E_{\theta i}^{-1} - \mu_{r\theta i} E_{ri}^{-1} - \mu_{z\theta i} (\mu_{rzi} E_{ri}^{-1} + \mu_{\theta zi} k_i E_{\theta i}^{-1}) \\ c_{2i} &= k_i E_{\theta i}^{-1} + \mu_{r\theta i} E_{ri}^{-1} + \mu_{z\theta i} (\mu_{rzi} E_{ri}^{-1} - \mu_{\theta zi} k_i E_{\theta i}^{-1}) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Radiaalpinge pidevustingimus pinnal  $r = R$ :

$$d\sigma_{rm}(R) = d\sigma_{rm(m)}^*(R, R) \quad (13)$$

Silindri osa tasakaaluvõrrand:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \int_{r_{i-1}}^{r_i} d\sigma_{zi(m)}^*(r, R) r dr + \int_{r_{m-1}}^R d\sigma_{zm(m)}^*(r, R) r dr + \bar{\sigma}_{zm}(R) R dR = 0 \quad (14)$$

Algpinged kihis  $m$  [(5), (7)  $\rightarrow$  (13), (14)  $\rightarrow$ ]:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_{\theta m}(r) \\ \bar{\sigma}_{zm}(r) \end{aligned} \right\} = \frac{E_{\theta 1}^*}{2} \begin{bmatrix} F_{1m}(r) & F_{2m}(r) \\ F_{3m}(r) & F_{4m}(r) \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} d\tilde{\varepsilon}_{\theta(m)}(r)/dr \\ d\tilde{\varepsilon}_{z(m)}(r)/dr \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Siin  $\tilde{\varepsilon}_{\theta(m)}(r) = \varepsilon_{\theta(m)}(r_m) - \varepsilon_{\theta(m)}(r)$  ja  $\tilde{\varepsilon}_{z(m)}(r) = \varepsilon_{z(m)}(r_m) - \varepsilon_{z(m)}(r)$  on mõõdetavate deformatsioonide muudud.

Lisapinged kihis  $m$ :

$$\sigma_{\alpha m(m)}^*(r) = \int_r^{r_m} d\sigma_{\alpha m(m)}^*(r, R) \quad (\alpha = r, \theta, z)$$

[(5), (7), (11)  $\uparrow$  ]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rm(m)}^*(r) \\ \sigma_{\theta m(m)}^*(r) \\ \sigma_{zm(m)}^*(r) \end{Bmatrix} = \frac{E_{\theta 1}^*}{2} \begin{bmatrix} F_{5m}(r) & F_{6m}(r) \\ k_m F_{7m}(r) & k_m F_{8m}(r) \\ E_{zm} F_{9m}(r) & E_{zm} F_{10m}(r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\theta(m)}(r) \\ \tilde{\varepsilon}_{z(m)}(r) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$F_{1m}(r) = A_{1m} r^{k_m} - B_{1m} r^{-k_m}$$

$$F_{2m}(r) = A_{2m} r^{k_m} - B_{2m} r^{-k_m}$$

$$F_{3m}(r) = r^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{m-1} E_{zi} C_{1i} + E_{zm} G_{1m}(r) \right]$$

$$F_{4m}(r) = r^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{m-1} E_{zi} C_{2i} + E_{zm} G_{2m}(r) \right]$$

.....

$$C_{1i} = c_{3i} A_{1i} (k_i + 1)^{-1} (r_i^{k_i+1} - r_{i-1}^{k_i+1}) + c_{4i} B_{1i} (1 - k_i)^{-1} (r_i^{1-k_i} - r_{i-1}^{1-k_i})$$

$$G_{1m}(r) = c_{3m} A_{1m} (k_m + 1)^{-1} (r^{k_m+1} - r_{m-1}^{k_m+1}) + c_{4m} B_{1m} (1 - k_m)^{-1} (r^{1-k_m} - r_{m-1}^{1-k_m})$$

.....

Deformatsioonimuutude arvutus algpinge järgi [(15)  $\rightarrow$  ]:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\theta(m)}(r) \\ \tilde{\varepsilon}_{z(m)}(r) \end{Bmatrix} = -\frac{2}{E_{\theta 1}^*} \int_r^{r_m} \frac{dR}{F_m(R)} \begin{bmatrix} F_{4m}(R) & -F_{2m}(R) \\ -F_{3m}(R) & F_{1m}(R) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{\theta m}(R) \\ \bar{\sigma}_{zm}(R) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$F_m(R) = F_{1m}(R) F_{4m}(R) - F_{2m}(R) F_{3m}(R)$$

Alginged deformatsioonimuutude kaudu:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta m} \\ \varepsilon_{zm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\theta m}^{-1} & -\mu_{z\theta m} E_{zm}^{-1} \\ -\mu_{\theta zm} E_{\theta m}^{-1} & E_{zm}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{\theta m} \\ \bar{\sigma}_{zm} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{\theta m} \\ \bar{\varepsilon}_{zm} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{\theta m} \\ \bar{\sigma}_{zm} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} E_{\theta m}^* & \mu_{z\theta m} E_{zm}^* \\ \mu_{\theta zm} E_{\theta m}^* & E_{zm}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{\theta m} \\ \bar{\varepsilon}_{zm} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$E_{\theta m}^* = E_{\theta m} (1 - \mu_{\theta zm} \mu_{z\theta m})^{-1} \quad E_{zm}^* = E_{zm} (1 - \mu_{\theta zm} \mu_{z\theta m})^{-1}$$

**Avaldised (1), (12), (15) - (18) moodustavad kihilise kasvatamise/kahandamise meetodite üldistatud algoritmi, mis võimaldab arvutada jääkpinged:**

- välis- või sisepinnal kasvatamisel/kahandamisel statsionaarsel pinnal mõõdetud deformatsioonide järgi. Sisepinnal kasvatamisel/kahandamisel on välisraadius  $r_0$  ja kihid nummerdatakse alates väliskihist sissepoole. Kui deformatsioone mõõdeti ainult kahandamisel, siis  $\varepsilon_{\theta(n)}(r_n) = \varepsilon_{z(n)}(r_n) = 0$ .
- kasvatamisel/kahandamisel välispinnal mõõdetud algdeformatsioonide järgi.
- kasvatamisel/kahandamisel välis- või sisepinnal teljesihilise deformatsiooni järgi, eeldades ring- ja pikialgpingete võrdsust ( $\sigma_{\theta m}(r) = \sigma_{zm}(r)$ ).

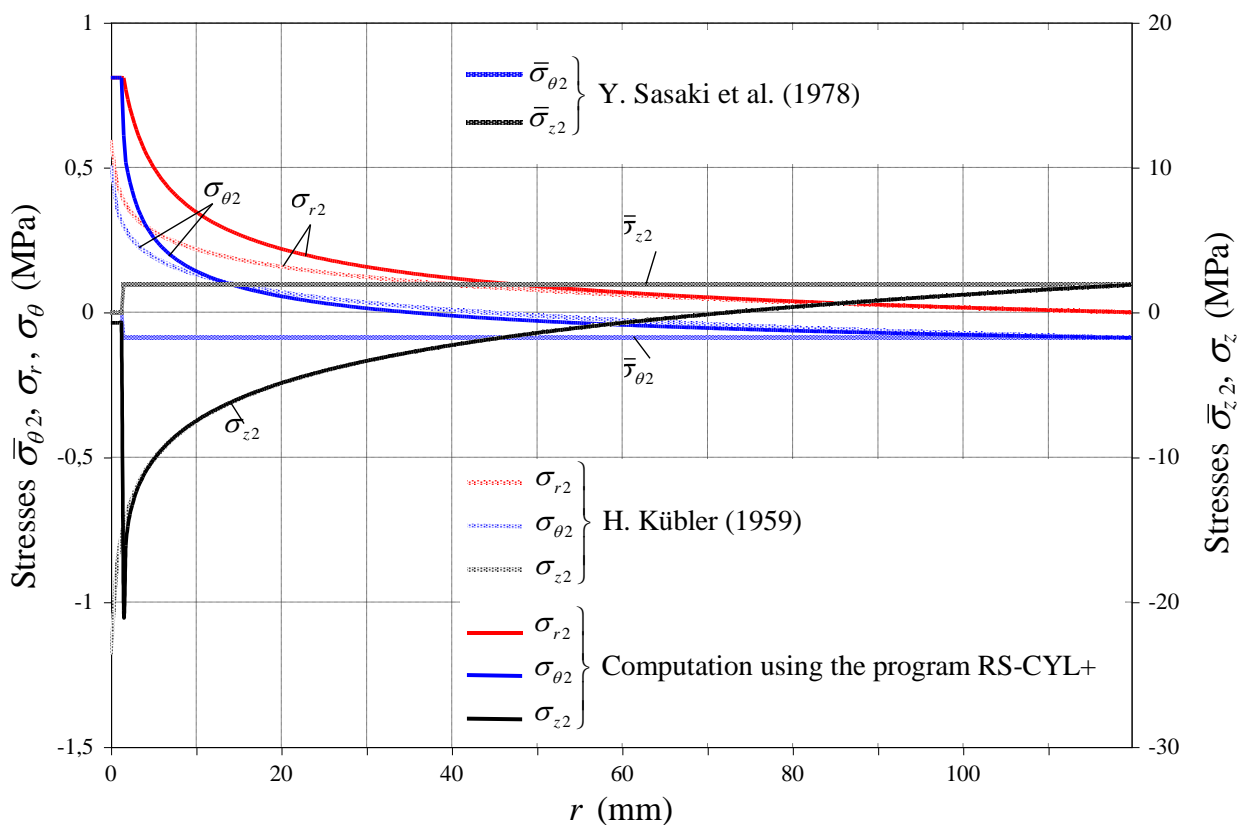
Erijuhtudel jääkpingete arvutus lihtsustub. Näiteks kihilise isotroopse silindri puhul ( $\mu_{r\theta i} = \mu_{rz i} = \mu_{z\theta i} = \mu_{\theta z i} = \mu_i$ ,  $E_{ri} = E_{\theta i} = E_i$ ) tuleneb esitatud algoritmist töös [Kõo, Valgur: 5<sup>th</sup> Int. Conf. On Residual Stresses, Linköping, 1997] toodud algoritm.

## **Arvutiprogramm RS-CYL+ ja rakendusnäide**

Esitatud algoritm on vormistatud arvutiprogrammiks RS-CYL+ kasutamiseks alg- ja jääkpingete arvutamiseks mittehomogeensete ortotroopsete silindrite puhul. Programm võimaldab katseandmete

lähendamist astmefunktsioonidega või eelnevalt määratud lähtefunktsioonide sisestamist. Arvutustulemusi on võimalik esitada tabelis või graafikutena.

Näitena toome kasvupingete arvutuse tulemused Jaapani punase männi (*Pinus densiflora*) tüves (Joon. 2). Tüve modelleeriti kahekihilise konstantsete algpingetega  $\bar{\sigma}_{\theta 2}$ ,  $\bar{\sigma}_{z 2}$  kasvava ortotroopse täissilindrina ( $r_0 = 0$ ). Lähteandmed ( $r_2 = 120$  mm,  $E_{\theta 2} = 0,246$  GPa,  $E_{z 2} = 7,60$  GPa,  $\mu_{\theta z 2} = 0,03$ ,  $\mu_{z \theta 2} = 0,52$ ,  $\bar{\sigma}_{\theta 2} = -0,088$  MPa,  $\bar{\sigma}_{z 2} = 1,90$  MPa) on võetud artiklist [Sasaki jt.: *Mokuzai Gakkaishi*, 1978, **24**, 149-157] ja raamatust [Ашкеази: Анизотропия древесины и древесных материалов, Москва, 1978]: ( $E_{r 2} = 0,585$  GPa,  $\mu_{r \theta 2} = 0,54$ ,  $\mu_{r z 2} = 0,020$ ).



**Joonis 2.** Kasvujääkpinged Jaapani punase männi tüves

Võrdluseks on joon. 2 toodud Kübleri võrranditega [Mattheck, Kübler: *Wood – The Internal Optimization of Trees*, 1995]



$$\sigma_{r_2}(r) = \bar{\sigma}_{\theta_2} \ln(r r_2^{-1})$$

$$\sigma_{\theta_2}(r) = \bar{\sigma}_{\theta_2} \left[ 1 + \ln(r r_2^{-1}) \right]$$

$$\sigma_{z_2}(r) = \bar{\sigma}_{z_2} \left[ 1 + 2 \ln(r r_2^{-1}) \right]$$

saadud tulemused.

Näeme, et kasvujääkpinged on maksimaalsed tüve ristlõike keskosas säsi lähedal, kus pikipingete absoluutväärtus ületab ring- ja radiaalpingeid ligikaudu 25-kordselt. Kasvupiirkonnas  $0,5r_2 \leq r \leq r_2$  erinevad Kübleri võrranditega saadud tulemused meie andmetest vähe. Tüve teljel ( $r \rightarrow 0$ ) kasvavad pinged Kübleri mudeli järgi piiramatult.

## Kokkuvõte

- On koostatud algoritm jääkpingete määramiseks mittetäielikult ortotroopsetes (eeldatakse Poissoni tegurite  $\mu_{zri}$  ja  $\mu_{z\theta i}$  võrdsust) kihilistes silindrites.
- Algoritm on kihilise kasvatamise/kahandamise meetoditele ühine, võimaldades arvutada jääkpingeid kas statsionaarsel või liikuval pinnal mõõdetud deformatsioonide järgi.
- Algoritm on realiseeritud arvutiprogrammis RS-CYL+.
- Programmiga on arvutatud kasvujääkpinged Jaapani punase männi (*Pinus densiflora*) tüves ja tulemusi võrreldud Kübleri võrranditega saadud andmetega.